CEDI 2013

Nuevas Operaciones Binarias sobre los Conjuntos Borrosos de Tipo 2

Pablo Hernández[1], Susana Cubillo[2], Carmen Torres[2]

[1] Departamento de Matemática y Física.
Univ. Nacional Experimental del Táchira (UNET).
San Cristóbal, Táchira, Venezuela
phernandezv@unet.edu.ve

[2] Departamento de Matemática Aplicada.
Univ. Politécnica de Madrid (UPM).
28660 Boadilla del Monte, Madrid, España
{scubillo,ctorres}@fi.upm.es

Resumen Walker et al. ([19], [20]) definieron dos familias de operaciones binarias sobre **M** (conjunto de las funciones de [0,1] en [0,1]), y determinaron que, bajo ciertas condiciones, estas operaciones son t-normas (normas triangulares) o t-conormas sobre **L** (subconjunto de las funciones normales y convexas de **M**). En este trabajo se introducen dos operaciones binarias sobre **M**, diferentes a las dadas por Walker et al., y se estudian varias propiedades de las mismas, con el objeto de deducir nuevas t-normas y t-conormas sobre **L** y sobre **M**.

Palabras Clave: Funciones de [0,1] en [0,1], funciones normales y convexas, t-normas y t-conormas.

1. Introducción

Los conjuntos borrosos de tipo 2 (T2FSs) fueron introducidos por L.A. Zadeh en 1975 [22], como una extensión de los conjuntos borrosos de tipo 1 (FSs). Mientras que en estos últimos el grado de pertenencia de un elemento al conjunto viene determinado por un valor en el intervalo [0, 1], en el caso de los T2FSs el grado de pertenencia de un elemento es un conjunto borroso en [0,1], es decir, un T2FS queda determinado por una función de pertenencia $\mu : X \to \mathbf{M}$, donde $\mathbf{M} = [0,1]^{[0,1]}$ es el conjunto de las funciones de [0,1] en [0,1] (ver [11,13,14,19]). En este artículo se obtendrán resultados para los T2FSs con grados de pertenencia en **M**, y también en el subconjunto **L** de las funciones normales y convexas de **M**.

Las normas triangulares (t-normas) fueron introducidas por Menger [12]; mas tarde Schweizer y Sklar en [17,16] dieron la axiomática, usada actualmente, para definir t-normas. Debido a la estrecha conexión entre la teoría de los conjuntos borrosos y la teoría del orden (ver, por ejemplo, [5]), distintos autores han estudiado las t-normas sobre conjuntos parcialmente ordenados acotados (posets acotados), como por ejemplo en [3] y en [2]. En [15] se consideró la extensión de las t-normas sobre retículos acotados exigiendo unos axiomas (en adelante se llamarán "axiomas básicos"), que coinciden con los dados en [3] y [2].

En [4] se extendieron las definiciones de t-norma y t-conorma a los conjuntos borrosos intervalo valorado (IVFSs), pero se agregaron otras restricciones o propiedades a los axiomas básicos, estableciendo los "axiomas restrictivos". Posteriormente, en [19,20] los autores extendieron estos axiomas a los T2FSs, y presentaron dos familias de operaciones binarias sobre **M**, determinando que, bajo ciertas condiciones, son t_r-normas y t_r-conormas (t-normas y t-conormas según los axiomas restrictivos) sobre **L**. El objetivo de este artículo es la introducción de dos operaciones binarias sobre M, diferentes a las presentadas en [19,20], y el estudio de sus propiedades, para determinar si son t_r-norma o t_r-conorma sobre **L** y sobre **M**.

El artículo se organiza como sigue: en la Sección 2 se recuerdan algunas definiciones y propiedades de los FSs, IVFs y T2FSs; se exponen los antecedentes relacionados con las t-normas y t-conormas sobre los mismos, y se presentan los axiomas básicos y restrictivos. En la Sección 3 se presentan las operaciones $\circledcirc$ y $\circledast$ (ver Definición 12), y se estudia si satisfacen cada uno de los axiomas de t_r-norma y t_r-conorma, respectivamente, sobre **L** y sobre **M**. Esto nos permitirá proponer nuevas operaciones que resultarán ser t-norma y t-conorma sobre **L**, y sobre **M**.

La última sección está dedicada a exponer algunas conclusiones.

2. Preliminares

En todo el trabajo se denotará por X un conjunto no vacío que representará el universo de discurso. Además, $\leq$ denotará la relación de orden en el retículo de los números reales.

2.1. Varios Tipos de Conjuntos Borrosos

Definición 1. ([21]) *Un conjunto borroso de tipo 1 (FS), A, queda caracterizado por una* función de pertenencia μ_A,

$$\mu_A : X \to [0,1],$$

donde $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia de un elemento $x \in X$ al conjunto A.

Definición 2. ([1,18]) *Un conjunto borroso intervalo valorado (IVFS), A, queda caracterizado por una* función de pertenencia σ_A,

$$\sigma_A : X \to I = \{[a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

De esta manera, el grado de pertenencia de un elemento $x \in X$ al conjunto A es un intervalo en $[0,1]$.

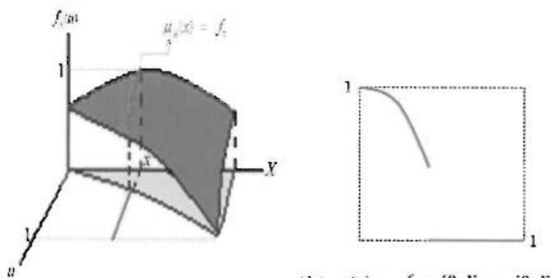
Definición 3. ([13,14]) *Un conjunto borroso de tipo 2 (T2FS), A, queda caracterizado por una* función de pertenencia:

$$\mu_A : X \to \mathbf{M} = [0,1]^{[0,1]} = Map([0,1],[0,1]).$$

Esto es, $\mu_A(x)$ es un conjunto borroso en el intervalo $[0,1]$, y es el grado *de pertenencia de un elemento $x \in X$ al conjunto A. Por tanto,*

$$\mu_A(x) = f_x\ , \quad donde \quad f_x : [0,1] \to [0,1].$$

Se denota por $F_2(X)$ al conjunto de todos los conjuntos borrosos de tipo 2 sobre X.



(a) (b) $\mu(x) = f_x : [0,1] \to [0,1]$

Figura 1. (a) Ejemplo de un T2FS, y (b) Ejemplo de un grado de pertenencia al T2FS.

Definición 4. ([19]) *Sea $a \in [0,1]$. La función característica de a es $\mathbf{a} : [0,1] \to [0,1]$, donde*

$$\mathbf{a}(x) = \begin{cases} 1 \ si\ x = a \\ 0 \ si\ x \neq a \end{cases}$$

Sea $\mathbf{J} \subset \mathbf{M}$ el conjunto de todas las funciones características de los elementos en $[0,1]$. Es decir, $\mathbf{J} = \{\mathbf{a} : [0,1] \to [0,1] : a \in [0,1]\}$. Hay un isomorfismo (de orden) entre $(\mathbf{J}, \sqsubseteq)$, ver Definición 7, y el intervalo $([0,1], \leq)$, que es el conjunto de los valores de pertenencia de los conjuntos borrosos.

Definición 5. ([19]) *Sea $[a,b] \subseteq [0,1]$. La función característica de $[a,b]$ es $\mathbf{[a,b]} : [0,1] \to [0,1]$, donde*

$$\mathbf{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 \ si\ x \in [a,b] \\ 0 \ si\ x \notin [a,b] \end{cases}$$

Sea $\mathbf{K} \subset \mathbf{M}$ el conjunto de todas las funciones características de los subintervalos de $[0,1]$. Además, existe un isomorfismo (de orden) entre $(\mathbf{K}, \sqsubseteq)$ y el conjunto de los valores de pertenencia de los IVFSs.

En [19], se justifica que las operaciones sobre $Map(X, \mathbf{M})$ se pueden definir de forma natural a partir de las operaciones sobre $\mathbf{M}$, verificando las mismas propiedades. Por tanto, en este artículo trabajaremos en $\mathbf{M}$ ya que todos los resultados se pueden extender directa y fácilmente a $Map(X, \mathbf{M})$, conjunto de las funciones de pertenencia de los elementos de $F_2(X)$.

Definición 6. ([7,19]) *En* $\mathbf{M}$ *se definen las operaciones* $\sqcup$ *(unión),* $\sqcap$ *(intersección),* $\neg$ *y los elementos* $\mathbf{0}$ *y* $\mathbf{1}$ *de la siguiente forma:*

$$(f \sqcup g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \vee z = x\},$$

$$(f \sqcap g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \wedge z = x\},$$

$$\neg f(x) = sup\{f(y) : 1 - y = x\} = f(1 - x),$$

$$\mathbf{0}(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x = 0 \\ 0 \; si \; x \neq 0 \end{cases}, \quad \mathbf{1}(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x = 1 \\ 0 \; si \; x \neq 1. \end{cases}$$

donde $\vee$ y $\wedge$ son las operaciones máximo y mínimo, respectivamente, en el retículo $[0, 1]$. Obsérvese que $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son precisamente las funciones características de 0 y 1, respectivamente.

Es fácil probar que $\sqcup$ y $\sqcap$ son idempotentes ($f \sqcap f = f$ y $f \sqcup f = f$, para todo $f \in \mathbf{M}$) y satisfacen las leyes de De Morgan respecto a la operación dada $\neg$, pero $\mathbb{M} = (\mathbf{M}, \sqcup, \sqcap, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ no tiene estructura de retículo, ya que no se cumple la ley de absorción [7,19]. Por otra parte, las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$ cumplen las propiedades requeridas para definir, cada una de ellas, un orden parcial sobre $\mathbf{M}$.

Definición 7. ([14,19]) *En* $\mathbf{M}$ *se definen los dos órdenes parciales siguientes:*

$$f \sqsubseteq g \; si \; f \sqcap g = f; \quad f \preceq g \; si \; f \sqcup g = g.$$

En general, estos dos órdenes no coinciden [14,19]. $f \sqcap \mathbf{1} = f$, lo cual implica que $f \sqsubseteq \mathbf{1}$, $\forall f \in \mathbf{M}$ ([19]), es decir, $\mathbf{1}$ es el mayor elemento del orden parcial $\sqsubseteq$. Por otra parte, $\mathbf{0} \sqcup f = f$, por tanto $\mathbf{0} \preceq f$, $\forall f \in \mathbf{M}$ ([19]), esto es $\mathbf{0}$ es el menor elemento del orden parcial $\preceq$. Además, la función constante $g = 0$ ($g(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$) es el menor y mayor elemento de $\sqsubseteq$ y $\preceq$, respectivamente.

Con el fin de facilitar las operaciones sobre $\mathbf{M}$, en trabajos anteriores se dieron la Definición y Teorema siguientes:

Definición 8. ([7,19]) *Si* $f \in \mathbf{M}$, *se definen* $f^L, f^R \in \mathbf{M}$ *como*

$$f^L(x) = sup\{f(y) : y \leq x\}, \qquad f^R(x) = sup\{f(y) : y \geq x\}.$$

f^L y f^R son monótonas creciente y decreciente, respectivamente. A partir de f^L y f^R, se estableció el siguiente resultado.

Teorema 1. ([19]) *Para todo* $f, g \in \mathbf{M}$, *se tiene:*

$$f \sqsubseteq g \;\Leftrightarrow\; (f^R \wedge g) \leq f \leq g^R, \qquad f \preceq g \;\Leftrightarrow\; (g^L \wedge f) \leq g \leq f^L.$$

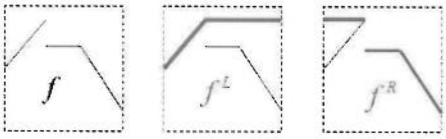


Figura 2. Ejemplos de f^L y f^R.

Es fácil comprobar que la función característica de un intervalo $[a, b]$ es $\mathbf{[a,b]} = \mathbf{a}^L \wedge \mathbf{b}^R$ (ver [19]).

A continuación se considerará $\mathbf{L}$, subconjunto de las funciones normales y convexas de $\mathbf{M}$, ya que en este conjunto se va a tener una estructura de retículo acotado y completo, lo que va a permitir construir t-normas y t-conormas de forma adecuada. Recordemos que:

Definición 9. *Una función $f \in \mathbf{M}$ es normal si* $\sup\{f(x) : x \in [0,1]\} = 1$.

Sea $\mathbf{N}$ el conjunto de todas las funciones normales en $\mathbf{M}$. Obsérvese que dada $f \in \mathbf{M}$, se tiene que $f \in \mathbf{N}$ si y sólo si $f^L \vee f^R = 1$, donde 1 es la función tal que $f(x) = 1$, para todo $x \in [0,1]$.

Definición 10. *Una función $f \in \mathbf{M}$ es convexa, si para cualquier $x \leq y \leq z$, se cumple que $f(y) \geq f(x) \wedge f(z)$.*

Sea $\mathbf{C}$ el conjunto de todas las funciones convexas en $\mathbf{M}$. Obsérvese que si $f \in \mathbf{M}$, entonces $f \in \mathbf{C}$ si y sólo si $f = f^L \wedge f^R$.

El conjunto de todas las funciones normales y convexas de $\mathbf{M}$ será denotado por $\mathbf{L}$. El álgebra $\mathbb{L} = (\mathbf{L}, \sqcup, \sqcap, \neg, 0, 1)$ es un subálgebra de $\mathbb{M}$. En $\mathbf{L}$, los órdenes parciales $\sqsubseteq$ and $\preceq$ coinciden, y $\mathbb{L}$ es un retículo acotado (0 y 1 son el mínimo y el máximo, respectivamente) y completo (ver [6,7,14,19]). Además, es evidente que $\mathbf{J} \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{L} \subset \mathbf{M}$.

La siguiente caracterización nos ayudará a establecer nuevos resultados:

Teorema 2. ([6,7]) *Sean $f, g \in \mathbf{L}$. $f \sqsubseteq g$ si y sólo si*

$$g^L \leq f^L \quad y \quad f^R \leq g^R.$$

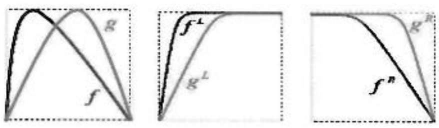


Figura 3. Ejemplo donde $f \sqsubseteq g$.

2.2. T-normas y T-conormas

Recordemos que una t-norma ([10]) es una operación binaria $T : [0,1]^2 \to [0,1]$, conmutativa, asociativa, creciente en cada argumento, y con elemento neutro 1. Además, una t-conorma es una operación binaria $S : [0,1]^2 \to [0,1]$, conmutativa, asociativa, creciente en cada argumento, y con elemento neutro 0. Definiciones similares se aplican para los retículos acotados. En [4,20] se extendió esta definición a los IVFSs y a los T2FSs, añadiendo algunos axiomas que reflejan algunas propiedades deseables. Por ejemplo, como $\mathbf{J} \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{L}$, parece rasonable exigir que las t-normas sobre $\mathbf{L}$ sean cerradas sobre $\mathbf{J}$ y sobre $\mathbf{K}$. Además, debido a que las t-normas sobre los IVFSs satisfacen $T([1,1],[a,b]) = [a,b]$ y $T([0,0],[a,b]) = [0,0]$, entonces, por analogía, se requiere que $T([0,1],[a,b]) = [0,b]$. De esta manera se establecieron los siguientes "axiomas restrictivos":

Definición 11. ([20]) *La operación binaria $T : \mathbf{L}^2 \to \mathbf{L}$ es una t_r-norma (según los axiomas restrictivos) sobre $\mathbf{L}$ si:*

1. *T es conmutativa*
2. *T es asociativa.*
3. *$T(f,1) = f$ para cualquier $f \in \mathbf{L}$ (elemento neutro).*
4. *Sean $f,g,h \in \mathbf{L}$ tal que $g \sqsubseteq h$, entonces $T(f,g) \sqsubseteq T(f,h)$ (creciente en cada argumento).*
5. $T(\mathbf{[0,1]},\mathbf{[a,b]}) = \mathbf{[0,b]}$.
6. *T es cerrada en $\mathbf{J}$.*
7. *T es cerrada en $\mathbf{K}$.*

De forma similar, una operación binaria $S : \mathbf{L}^2 \to \mathbf{L}$ es una t_r-conorma si satisface: los axiomas 1, 2, 4, 6 y 7 de la t_r-norma; el axioma 3': $S(f,0) = f$; y el axioma 5': $S(\mathbf{[0,1]},\mathbf{[a,b]}) = \mathbf{[a,1]}$. Los axiomas 1, 2, 3 y 4, son llamados "axiomas básicos", y la operación que satisface dichos axiomas será denominada simplemente t-norma o t-conorma, según sea el caso.

3. T-normas y T-conormas sobre L

En [18,19,20] se demostró que las operaciones $\sqcap$ y $\sqcup$ son t_r-norma y t_r-conorma, respectivamente, sobre $\mathbf{L}$. Además se introdujeron dos nuevas familias de operaciones sobre $\mathbf{M}$, $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$, obteniendo que son t_r-norma y t_r-conorma, respectivamente, sobre $\mathbf{L}$.

$$(f \blacktriangle g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \vartriangle z = x\},$$

$$(f \blacktriangledown g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \triangledown z = x\},$$

donde $\vartriangle$ y $\triangledown$ son, respectivamente, t-norma y t-conorma continuas sobre $[0,1]$.

Los autores no estudiaron si $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$, verifican los axiomas básicos sobre $\mathbf{M}$, respecto a cada órden parcial.

Observemos que si $\vartriangle = \wedge$ y $\triangledown = \vee$, entonces $\blacktriangle = \sqcap$ y $\blacktriangledown = \sqcup$.

Posteriormente, [8,9] presentaron dos familias de operaciones binarias sobre **M**, más generales que ▲ y ▼, ya que por $\wedge$ consideraron cualquier operación binaria sobre [0,1], y determinaron que, bajo ciertas condiciones, una familia de operaciones es t-norma sobre $(\mathbf{M}, \sqsubseteq)$ y la otra es t-conorma sobre $(\mathbf{M}, \preceq)$.

A continuación se introducen dos operaciones sobre **M**, que no se obtienen (ver Observaciones 1 y 2) con las fórmulas para ▲ y ▼, y se analiza si satisfacen cada uno de los axiomas restrictivos.

Definición 12. *Para todo $f, g \in \mathbf{M}$ se definen las operaciones binarias*

$$f \circledcirc g = f^R \wedge g^R \ , \qquad f \circledast g = f^L \wedge g^L \ .$$

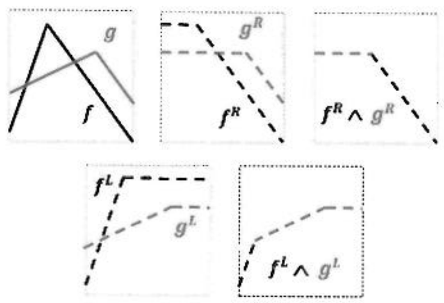


Figura 4. Ejemplos de las operaciones $\circledcirc$ y $\circledast$.

De acuerdo a [19], $f^R \wedge g^R = f^R \sqcap g^R = f^R \sqcap g = f \sqcap g^R = (f \sqcap g)^R$, y $f^L \wedge g^L = f^L \sqcup g^L = f^L \sqcup g = f \sqcup g^L = (f \sqcup g)^L$, por tanto, $\forall\ f, g\ \in \mathbf{M}$

$$f \circledcirc g = f^R \sqcap g^R = f \sqcap g^R = f^R \sqcap g = (f \sqcap g)^R \ ,$$

$$f \circledast g = f^L \sqcup g^L = f \sqcup g^L = f^L \sqcup g = (f \sqcup g)^L \ .$$

Por otra parte, es fácil comprobar que $\circledcirc$ y $\circledast$ son monótonas decreciente y creciente, respectivamente. Por tanto,

$$(f \circledcirc g)^R = (f^R \wedge g^R)^R = (f^R \wedge g^R) = f \circledcirc g,$$

$$(f \circledast g)^L = (f^L \wedge g^L)^L = (f^L \wedge g^L) = f \circledast g.$$

Proposición 1. $\circledcirc$ *y* $\circledast$ *son conmutativas y asociativas, sobre* **M**.

El siguiente lema nos permite deducir que 1 y 0 no son elementos neutros de $\circledcirc$ y $\circledast$, respectivamente.

Lema 1. $\forall\ f \in \mathbf{M}$,

$$f \circledcirc 1 = f^R, \qquad f \circledast 0 = f^L.$$

Del siguiente lema se deduce que 0 y 1 no son elementos absorbentes de $\circledcirc$ y $\circledast$, respectivamente, sobre **M**. No obstante, sí lo son sobre **N**, como se puede ver en el Corolario 1.

Lema 2. $\forall\ f \in \mathbf{M}$.

$$f \circledcirc 0 = f^R \wedge 0, \qquad f \circledast 1 = f^L \wedge 1.$$

Corolario 1. *Si* $f \in \mathbf{N}$, *entonces*

$$f \circledcirc 0 = 0, \qquad f \circledast 1 = 1.$$

Observación 1. En [19], se obtuvo que 1 y 0 son los elementos neutros de ▲ y ▼, respectivamente, en **M**. Sin embargo, considerando el Lema 1 y el Corolario 1, basta tomar un $f \in \mathbf{L}$, tal que $f \neq f^R$ y $f \neq f^L$ (por ejemplo, $f(x) = 1 - 4(x - 0{,}5)^2$, $x \in [0, 1]$) para comprobar que 1 y 0 no son elementos neutros para las operaciones $\circledcirc$ y $\circledast$, sobre **L**, y por tanto, tampoco sobre **M**. En consecuencia, esto es suficiente para asegurar que $\circledcirc$ y $\circledast$ no se obtienen con las fórmulas para ▲ y ▼, sobre **L**, y por tanto, tampoco sobre **M**.

Analicemos las leyes ditributivas respecto a $\sqcap$ y $\sqcup$.

Proposición 2. $\forall\ f, g,\ h\ \in \mathbf{M}$ *se cumple que*

$$f \circledcirc (g \sqcap h) = (f \circledcirc g) \sqcap (f \circledcirc h)\ , \qquad f \circledast (g \sqcup h) = (f \circledast g) \sqcup (f \circledast h)\ .$$

Analicemos si las operaciones $\circledcirc$ y $\circledast$ son crecientes en cada argumento, respecto a los órdenes parciales $\sqsubseteq$ y $\preceq$, respectivamente.

Proposición 3. *Sean* $f, g,\ h\ \in \mathbf{M}$. *Se cumple que*

$$Si\ g \sqsubseteq h \Rightarrow (f \circledcirc g) = (g \circledcirc f) \sqsubseteq (f \circledcirc h) = (h \circledcirc f).$$

$$Si\ g \preceq h \Rightarrow (f \circledast g) = (g \circledast f) \preceq (f \circledast h) = (h \circledast f).$$

Proposición 4. *Sean* $f, g \in \mathbf{M}$, *entonces*

$$(f \circledcirc g) \in \mathbf{C}\ , \qquad (f \circledast g) \in \mathbf{C}\ .$$

Proposición 5. $\circledcirc$ *y* $\circledast$ *son cerradas en* **N**, *y en* **L**.

Corolario 2. $\circledcirc$ *y* $\circledast$ *son crecientes en cada argumento en el retículo* $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$.

Los siguientes resultados proporcionan algunas propiedades de $\circledcirc$ y $\circledast$ en los conjuntos **J** y **K**.

Proposición 6. *Sean* $a, b, c, d \in [0, 1]$, *tal que* $a \leq b$ *y* $c \leq d$, *entonces*

$$\mathbf{[a,b]} \circledcirc \mathbf{[c,d]} = \mathbf{[0,e]},\ e = b \wedge d. \qquad \mathbf{[a,b]} \circledast \mathbf{[c,d]} = \mathbf{[f,1]},\ f = a \vee c.$$

Es decir, $\circledcirc$ *y* $\circledast$ *son cerradas en* **K**.

Corolario 3. $\circledcirc$ *y* $\circledast$ *no son cerradas en* $\mathbf{J}$.

Observación 2. $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$ son cerradas en $\mathbf{J}$, por tanto el Corolario 3 también justifica que $\circledcirc$ y $\circledast$ no se obtienen de $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$, sobre $\mathbf{L}$, ni sobre $\mathbf{M}$.

Corolario 4. *Sean* $a, b \in [0, 1]$, *tal que* $a \leq b$, *entonces*

$$[0,1] \circledcirc [a,b] = [0,b] \ , \quad [0,1] \circledast [a,b] = [a,1] \ .$$

Observación 3. Las operaciones $\circledcirc$ y $\circledast$, no satisfacen los axiomas correspondientes al elemento neutro y la clausura en $\mathbf{J}$, sin embargo, verifican todos los demás axiomas de t_r-norma y t_r-conorma, respectivamente, sobre $\mathbf{L}$.

Proposición 7. *Sean las operaciones binarias*

$$f \bar{\circledcirc} g = \begin{cases} f & si\ g = 1 \\ g & si\ f = 1 \\ f \circledcirc g & en\ otro\ caso \end{cases} , \quad f \bar{\circledast} g = \begin{cases} f & si\ g = 0 \\ g & si\ f = 0 \\ f \circledast g & en\ otro\ caso \end{cases} ,$$

para todo $f, g \in \mathbf{M}$. *Entonces,* $\bar{\circledcirc}$ *es una t-norma sobre* $(\mathbf{M}, \sqsubseteq)$. *No satisface la clausura en* $\mathbf{J}$, *pero, verifica todos los demás axiomas de* t_r*-norma sobre* $\mathbf{L}$, *por tanto es una t-norma sobre* $\mathbf{L}$. *Además,* 0 *es el elemento absorbente de* $\bar{\circledcirc}$ *en* $\mathbf{L}$. *De forma similar,* $\bar{\circledast}$ *es una t-conorma sobre* $(\mathbf{M}, \preceq)$. *No satisface la clausura en* $\mathbf{J}$, *pero, verifica todos los demás axiomas de* t_r*-conorma sobre* $\mathbf{L}$, *por tanto es una t-conorma sobre* $\mathbf{L}$. *Además,* 1 *es el elemento absorbente de* $\bar{\circledast}$ *en* $\mathbf{L}$.

Observación 4. Si $f, g \in \mathbf{J}$, tal que $f \neq 1 \neq g$ y $f \neq 0 \neq g$, entonces $\bar{\circledcirc} = \circledcirc$ y $\bar{\circledast} = \circledast$, y por tanto, de acuerdo a la Observación 2, $\bar{\circledcirc}$ y $\bar{\circledast}$ no se obtienen de las fórmulas de $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$, sobre $\mathbf{L}$, ni sobre $\mathbf{M}$.

4. Conclusiones

En este trabajo se han introducido las operaciones binarias $\circledcirc$ y $\circledast$, diferentes a las definidas en [19]. Se ha analizado si dichas operaciones satisfacen cada uno de los axiomas de t_r-norma y t_r-conorma sobre $\mathbf{L}$ y sobre $\mathbf{M}$.

A partir de $\circledcirc$ y $\circledast$ se han obtenido las operaciones binarias $\bar{\circledcirc}$ y $\bar{\circledast}$, que han resultado ser, respectivamente, t-norma sobre $\mathbf{L}$ y sobre $(\mathbf{M}, \sqsubseteq)$, y t-conorma sobre $\mathbf{L}$ y sobre $(\mathbf{M}, \preceq)$. Se ha demostrado que estas Ã°ltimas operaciones verifican todos los axiomas de t_r-norma y t_r-conorma, respectivamente, sobre $\mathbf{L}$, excepto la clausura sobre $\mathbf{J}$.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado parcialmente por la CICYT (España) proyecto TIN2011-29827-C02-01, UPM-CAM, FONACIT (Venezuela) y UNET (Venezuela).

Referencias

1. Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M.: Generation of interval-valued fuzzy and Atanassov's intuitionistic fuzzy connectives from fuzzy connectives and from K_α operators. Laws for conjunctions and disjunctions. Amplitude. Internat. J. Intell. Systems. 23, 680–714 (2008).
2. De Baets, B., Mesiar, R.: Triangular norms on product lattices. Fuzzy Sets and Systems. 104, 61–75 (1999).
3. De Cooman, G., Kerre, E.: Order norms on bounded partially ordered sets. Journal Fuzzy Mathematics, 2, 281–310 (1994).
4. Gehrke, M., Walker, C., Walker, E.: Some comments on interval-valued fuzzy sets. Internat. J. Intell. Systems. 11, 751–759 (1996).
5. Goguen, J.: L-Fuzzy Sets. J. Math. Anal. Appli. 18(1), 623–668 (1967).
6. Harding, J., Walker, C., Walker, E.: Convex normal functions revisited. Fuzzy Sets and Systems. 161, 1343–1349 (2010).
7. Harding, J., Walker, C., Walker, E.: Lattices of convex normal functions. Fuzzy Sets and Systems. 159, 1061–1071 (2008).
8. Hernández, P., Cubillo, S., Torres, C.: Negations on type-2 fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, en revisión.
9. Hernández, P., Cubillo, S., Torres, C.: About t-norms on type-2 fuzzy sets. In: 8th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, EUSFLAT 2013. Aceptado, por aparecer.
10. Klement, P., Mesiar, R., Pap, E.: Triangular Norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (2000).
11. Mendel, J., Jhon, R.: Type-2 fuzzy sets made Simple. IEEE Trans. Fuzzy Systems. 10(2), 117–127 (2002).
12. Menger, K.: Statical metrics. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 37, 535-537 (1942).
13. Mizumoto, M., Tanaka, K.: Fuzzy sets of type-2 under algebraic product and algebraic sum. Fuzzy Sets and Systems, 5, 277–290 (1981).
14. Mizumoto, M., Tanaka, K.: Some properties of fuzzy sets of type-2. Inf. Control, 31, 312–340 (1976).
15. Ray, S.: Representation of a Boolean algebra by its triangular norms. Matheware and Soft Computing, 4, 63–68 (1997).
16. Schweizer, B., Sklar, A.: Associative functions and statistical triangle inequalities. Publ. Math., 8, 169–186 (1961).
17. Schweizer, B., Sklar, A.: Statistical metric spaces. Pacific J. Math., 10, 313–334 (1960). .
18. Walker, C., Walker, E.: Some general comments on fuzzy sets of type-2. Internat. J. Intell. Systems. 24, 62–75 (2009).
19. Walker, C., Walker, E.: The algebra of fuzzy truth values. Fuzzy Sets and Systems. 149, 309–347 (2005).
20. Walker, C., Walker, E.: T-norms for type-2 fuzzy sets. In: Proc. Internat. Conf. on Fuzzy Systems IEEE 2006, pp. 1235–1239, July 16–21, Vancouver (Canadá) (2006).
21. Zadeh, L.: Fuzzy sets. Inf. Control, 20, 301–312 (1965).
22. Zadeh, L.: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Inf. Sci., 8, 199–249 (1975).